अध्याय **8**

समाकलों के अनुप्रयोग

8.1 समग्र अवलोकन (Overview)

इस अध्याय में, सरल वक्रों के अंतर्गत क्षेत्रफल ज्ञात करने, रेखाओं तथा वृत्तों, परवलयों और दीर्घवृत्तों के चापों के मध्य क्षेत्रफल ज्ञात करने तथा उपरोक्त वक्रों द्वारा परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए समाकलों के कुछ विशिष्ट अनुप्रयोगों की चर्चा की गयी है:

8.1.1 वक्र $y = f(x)$, x-अक्ष तथा $x = a$ और $x = b$ $(b > a)$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

8.1.2 वक्र $x = \phi(y)$, y-अक्ष तथा $y = c$ और $y = d$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_c^d x\,dy = \int_c^d \phi(y)\,dy$$

8.1.3 दो $y = f(x)$, $y = g(x)$ वक्रों तथा $x = a$, $x = b$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल सूत्र है:

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx,$$ जहाँ $f(x) \geq g(x)$ $[a, b]$ में है।

8.1.4 यदि $[a, c]$ में, $f(x) \geq g(x)$ है तथा $[c, b]$ में, $f(x) \leq g(x)$, $a < c < b$, है तो

$$\text{क्षेत्रफल} = \int_a^c [f(x) - g(x)]\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$ है।

8.2 हल किए हुए उदाहरण

लघु उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

उदाहरण 1 0 और π के बीच, वक्र $y = \sin x$ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 8.1

हल हमें प्राप्त है:

$$\text{क्षेत्रफल OAB} = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = \left|-\cos x\right|_0^{\pi}$$

$$= \cos 0 - \cos\pi = 2 \text{ वर्ग इकाई}$$

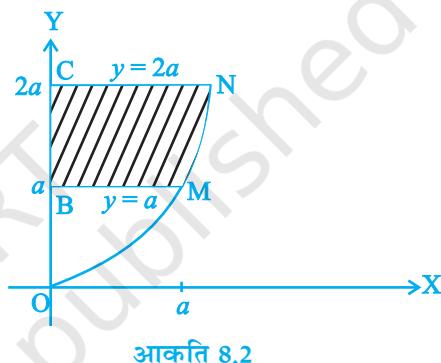
उदाहरण 2 वक्र $ay^2 = x^3$, y-अक्ष तथा $y = a$ और $y = 2a$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल हमें प्राप्त है : $\text{क्षेत्रफल BMNC} = \int_a^{2a} x\,dy = \int_a^{2a} a^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}\,dy$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5}\left|y^{\frac{5}{3}}\right|_a^{2a}$$

$$= \frac{3a^{\frac{1}{3}}}{5}\left|(2a)^{\frac{5}{3}} - a^{\frac{5}{3}}\right|$$

$$= \frac{3}{5}a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{5}{3}}\left|(2)^{\frac{5}{3}} - 1\right|$$

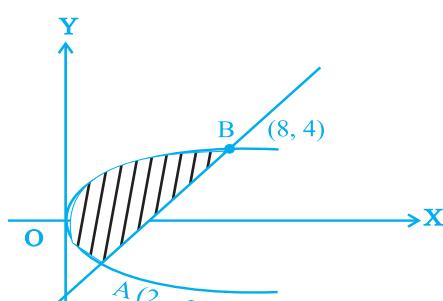
$$= \frac{3}{5}a^2\left|2.2^{\frac{2}{3}} - 1\right| \text{ वर्ग इकाई}$$

आकृति 8.2

उदाहरण 3 परवलय $y^2 = 2x$ और सरल रेखा $x - y = 4$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिये हुए वक्रों के प्रतिच्छेद बिंदु समीकरण $x - y = 4$ और $y^2 = 2x$ को x और y के लिए हल करने पर प्राप्त किए जाते हैं।

हमें $y^2 = 8 + 2y$ अर्थात् $(y - 4)(y + 2) = 0$ प्राप्त है। इससे $y = 4, -2$ तथा $x = 8, 2$ प्राप्त होता है। इस प्रकार, वाँछित प्रतिच्छेद बिंदु $(8, 4)$ और $(2, -2)$ है।

$$\text{अत:, क्षेत्रफल} = \int_{-2}^{4}\left(4 + y - \frac{1}{2}y^2\right)dy$$

$$= \left|4y + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{6}y^3\right|_{-2}^{4} = 18 \text{ वर्ग इकाई}$$

आकृति 8.3

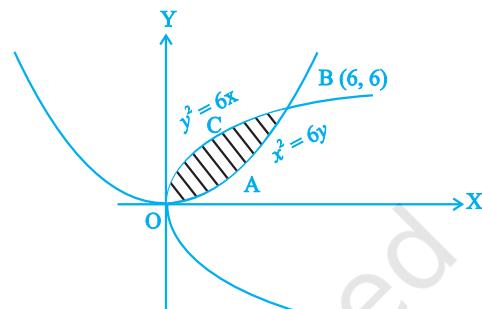
उदाहरण 4 परवलयों $y^2 = 6x$ और $x^2 = 6y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिए हुए परवलयों के प्रतिच्छेद बिंदु इन के समीकरणों को x और y के लिए हल करके ज्ञात किए जा सकते हैं। ये बिंदु 0(0, 0) और (6, 6) हैं। अत:,

$$\text{OABC का क्षेत्रफल} = \int_0^6 \left(\sqrt{6x} - \frac{x^2}{6}\right) dx$$

$$= \left|2\sqrt{6}\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{x^3}{18}\right|_0^6$$

आकृति 8.4

$$= 2\sqrt{6}\frac{(6)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(6)^3}{18} = 12 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 5 वक्र $x = 3\cos t$, $y = 2\sin t$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल t को निम्नलिखित प्रकार से लुप्त कीजिए:

$x = 3\cos t,\ y = 2\sin t \Rightarrow \frac{x}{3} = \cos t$, तथा $\frac{y}{2} = \sin t$, इनसे हमें, प्राप्त होता है:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ जो एक दीर्घवृत्त का समीकरण है।

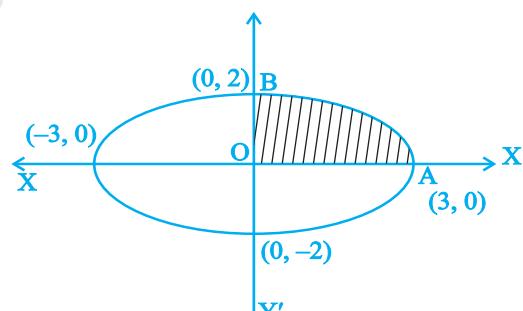
आकृति 8.5 से, हम प्राप्त करते हैं कि

$$\text{वाँछित क्षेत्रफल} = 4\int_0^3 \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}\, dx$$

$$= \frac{8}{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3}\right]_0^3$$

$= 6\pi$ वर्ग इकाई

आकृति 8.5

दीर्घ उत्तरीय (L.A.)

उदाहरण 6 उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो परवलय $y = \frac{3x^2}{4}$ और रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ के बीच में परिबद्ध है।

हल दिये हुए वक्र $y = \frac{3x^2}{4}$ और रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ के समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$3x^2 - 6x - 24 = 0$$

$\Rightarrow \quad (x-4)(x+2) = 0$

$\Rightarrow \quad x = 4, \quad x = -2$

जिनसे $y = 12, \quad y = 3$ प्राप्त होता है।

आकृति 8.6 से वाँछित क्षेत्रफल = ABC का क्षेत्रफल

आकृति 8.6

$$= \int_{-2}^{4} \frac{12+3x}{2}\, dx - \int_{-2}^{4} \frac{3x^2}{4}\, dx$$

$$= \left(6x + \frac{3x^2}{4}\right)_{-2}^{4} - \left|\frac{3x^3}{12}\right|_{-2}^{4}$$

= 27 वर्ग इकाई

उदाहरण 7 वक्र $x = at^2$ और $y = 2at$ द्वारा $t = 1$ और $t = 2$ के संगत कोटियों के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल दिया है : $x = at^2$ ...(i),

$y = 2at$ ...(ii) जिससे $t = \frac{y}{2a}$ हुआ।

t का यह मान (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है : $y^2 = 4ax$ ।

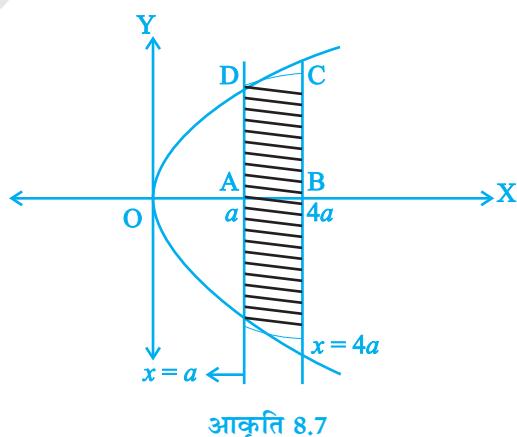
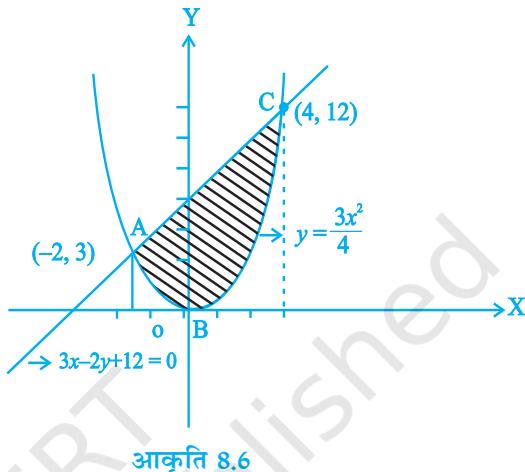
(i) में $t = 1$ और $t = 2$ रखने पर, हमें $x = a$, और $x = 4a$ प्राप्त होते हैं।

आकृति 8.7 से, वाँछित क्षेत्रफल

= 2 × ABCD का क्षेत्रफल

आकृति 8.7

$$= 2\int_{a}^{4a} y\,dx = 2 \times 2 \int_{a}^{4a} \sqrt{ax}\, dx$$

$$= 8\sqrt{a}\left|\frac{(x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{a}^{4a} = \frac{56}{3}a^2 \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 8 x–अक्ष के ऊपर परवलय $y^2 = ax$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 2ax$ के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल वक्रों की दिये हुए समीकरणों को हल करने पर, हमें प्राप्त होता है: $x^2 + ax = 2ax$

जिससे $x = 0$ या $x = a$ प्राप्त होते हैं।

इससे क्रमश: $y = 0$ और $y = \pm a$ प्राप्त होता है।

आकृति 8.8

आकृति 8.8 से, ODAB क्षेत्र का क्षेत्रफल

$$= \int_0^a \left(\sqrt{2ax - x^2} - \sqrt{ax}\right) dx$$

मान लीजिए कि $x = 2a \sin^2\theta$ है। तब,

$dx = 4a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$ तथा

$$x = 0, \Rightarrow \theta = 0, \; x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

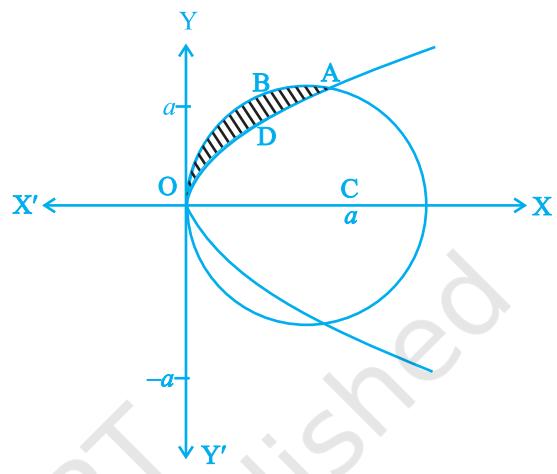
पुन:, $$\int_0^a \sqrt{2ax - x^2}\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2a \sin\theta \cos\theta)\, (4a \sin\theta \cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta = a^2 \left(\theta - \frac{\sin 4\theta}{4}\right)_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} a^2$$ इसके साथ ही,

$$\int_0^a \sqrt{ax}\, dx = \sqrt{a}\, \frac{2}{3} \left(x^{\frac{3}{2}}\right)_0^a = \frac{2}{3} a^2$$

इस प्रकार, वाँछित क्षेत्रफल $= \frac{\pi}{4} a^2 - \frac{2}{3} a^2 \quad = a^2 \quad \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 9 रेखा $x = \frac{a}{2}$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के काटे गए एक लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल समीकरण $x^2 + y^2 = a^2$ और $x = \frac{a}{2}$ को हल करने पर, हमें इनके प्रतिच्छेद बिंदु प्राप्त होते हैं, जो $\frac{a}{2}, \sqrt{3}\,\frac{a}{2}$ और $\frac{a}{2}, -\frac{\sqrt{3}a}{2}$ हैं।

आकृति 8.9

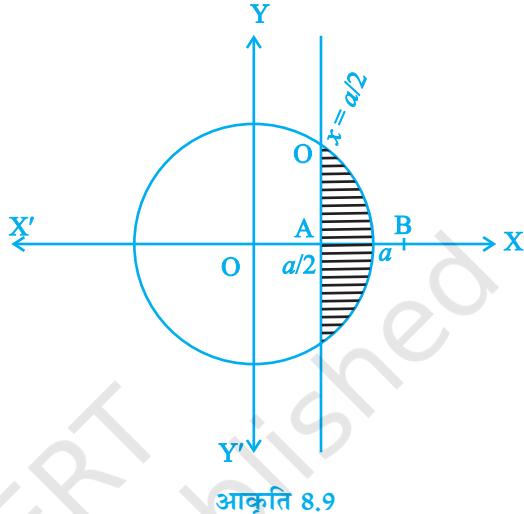
अतः आकृति 8.9 से, हमें प्राप्त होता है:

वाँछित क्षेत्रफल = OAB के क्षेत्रफल का

$$\text{दोगुना} = 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_{\frac{a}{2}}^{a}$$

$$= 2\left[\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{a}{4}\cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{a^2}{12}\left(6\pi - 3\sqrt{3} - 2\pi\right) = \frac{a^2}{12}\left(4\pi - 3\sqrt{3}\right) \text{ वर्ग इकाई}$$

वस्तुनिष्ठ प्रश्न

उदाहरण 10 से 12 तक प्रत्येक में, दिए हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

उदाहरण 10 वृत्त $x^2 + y^2 = 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है

(A) 4π वर्ग इकाई (B) $2\sqrt{2}\pi$ वर्ग इकाई

(C) $4\pi^2$ वर्ग इकाई (D) 2π वर्ग इकाई

हल सही उत्तर (D) है, क्योंकि क्षेत्रफल $= 4\int_{0}^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2}$

$$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{2 - x^2} + \sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}\right]_{0}^{\sqrt{2}} = 2\pi \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 11 दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल बराबर है

(A) $\pi^2 ab$ (B) πab (C) $\pi a^2 b$ (D) πab^2

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि क्षेत्रफल $= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a = \pi ab$$

उदाहरण 12 वक्र $y = x^2$ और रेखा $y = 16$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{256}{3}$ (C) $\frac{64}{3}$ (D) $\frac{128}{3}$

हल सही उत्तर (B) है। क्योंकि क्षेत्रफल $= 2\int_0^{16}\sqrt{y}\,dy$ है।

उदाहरण 13 और 14 में से प्रत्येक में रिक्त स्थान भरिए–

उदाहरण 13 वक्र $x = y^2$, y-अक्ष तथा रेखा $y = 3$ और $y = 4$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ________ है।

हल $\frac{37}{3}$ वर्ग इकाई

उदाहरण 14 वक्र $y = x^2 + x$, x-अक्ष तथा $x = 2$ और $x = 5$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ________ के बराबर है।

हल $\frac{297}{6}$ वर्ग इकाई $= \frac{99}{2}$ वर्ग इकाई

8.3 प्रश्नावली

संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न (S.A.)

1. वक्र $y^2 = 9x$, और $y = 3x$ से परिबद्ध क्षेत्रफल का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. परवलय $y^2 = 2px$, और $x^2 = 2py$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. वक्र $y = x^3$, $y = x + 6$ और $x = 0$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. वक्र $y^2 = 4x$ और $x^2 = 4y$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. $y^2 = 9x$ और $y = x$ के बीच में पड़ने वाले क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
6. परवलय $x^2 = y$ और रेखा $y = x + 2$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
7. रेखा $x = 2$ और परवलय $y^2 = 8x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
8. क्षेत्र $\{(x, 0) : y = \sqrt{4 - x^2}\}$ और x-अक्ष का चित्रण कीजिए। समाकलन का उपयोग करते हुए, इस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

9. वक्र $y = 2\sqrt{x}$ के अंतर्गत $x = 0$ और $x = 1$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. समाकलन का इस्तेमाल करते हुए, रेखा $2y = 5x + 7$, x-अक्ष तथा $x = 2$ और $x = 8$ रेखाओं से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

11. वक्र $y = \sqrt{x-1}$ का अंतराल $[1, 5]$ में एक संभावित आकृति खींचिए। इस वक्र के अंतर्गत तथा $x = 1$ और $x = 5$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

12. वक्र $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ के अंतर्गत तथा $x = 0$ और $x = a$ रेखाओं के बीच के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

13. $y = \sqrt{x}$ और $y = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

14. वक्र $y = -x^2$ और सरल रेखा $x + y + 2 = 0$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. प्रथम चतुर्थांश में वक्र $y = \sqrt{x}$, $x = 2y + 3$ और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

दीर्घ उत्तरीय प्रश्न (L.A.)

16. वक्र $y^2 = 2x$ और $x^2 + y^2 = 4x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

17. $x = 0$ और $x = 2\pi$ के बीच वक्र $y = \sin x$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18. समाकलन का प्रयोग करते हुए, उस त्रिभुज द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके शीर्ष $(-1, 1)$, $(0, 5)$ और $(3, 2)$ हैं।

19. क्षेत्र $\{(x, y) : y^2 \le 6ax$ और $x^2 + y^2 \le 16a^2\}$ का एक संभावित आकृति खींचिए। साथ ही, समाकलन की विधि द्वारा इस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

20. रेखा $x + 2y = 2$, $y - x = 1$ और $2x + y = 7$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. रेखाओं $y = 4x + 5$, $y = 5 - x$ और $4y = x + 5$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

22. वक्र $y = 2\cos x$ तथा x-अक्ष द्वारा $x = 0$ से $x = 2\pi$ तक परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

23. वक्र $y = 1 + |x + 1|$, $x = -3$, $x = 3$ तथा $y = 0$ का एक संभावित आकृति खींचिए। समाकलन का प्रयोग करते हुए, इन से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उद्देश्यात्मक प्रश्न

प्रश्न 24 से 34 तक प्रत्येक में, दिए हुए चारों विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए–

24. y-अक्ष, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\sqrt{2}$ वर्ग इकाई (B) $(\sqrt{2}+1)$ वर्ग इकाई

(C) $(\sqrt{2}-1)$ वर्ग इकाई (D) $(2\sqrt{2}-1)$ वर्ग इकाई

25. वक्र $x^2 = 4y$ और सरल रेखा $x = 4y - 2$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{3}{8}$ वर्ग इकाई (B) $\frac{5}{8}$ वर्ग इकाई (C) $\frac{7}{8}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{9}{8}$ वर्ग इकाई

26. वक्र $y=\sqrt{16-x^2}$ और x-अक्ष से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 8π वर्ग इकाई (B) 20π वर्ग इकाई (C) 16π वर्ग इकाई (D) 256π वर्ग इकाई

27. प्रथम चतुर्थांश में, x-अक्ष, रेखा $y = x$ और वृत्त $x^2 + y^2 = 32$ द्वारा घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल है-

(A) 16π वर्ग इकाई (B) 4π वर्ग इकाई (C) 32π वर्ग इकाई (D) 24 वर्ग इकाई

28. वक्र $y = \cos x$ द्वारा $x = 0$ और $x = \pi$ के बीच में परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2 वर्ग इकाई (B) 4 वर्ग इकाई (C) 3 वर्ग इकाई (D) 1 वर्ग इकाई

29. परवलय $y^2 = x$ और सरल रेखा $2y = x$ से परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{4}{3}$ वर्ग इकाई (B) 1 वर्ग इकाई (C) $\frac{2}{3}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{1}{3}$ वर्ग इकाई

30. वक्र $y = \sin x$ द्वारा कोटि $x = 0$, और $x = \frac{\pi}{2}$ तथा x-अक्ष के बीच परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2 वर्ग इकाई (B) 4 वर्ग इकाई (C) 3 वर्ग इकाई (D) 1 वर्ग इकाई

31. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 20π वर्ग इकाई (B) $20\pi^2$ वर्ग इकाई (C) $16\pi^2$ वर्ग इकाई (D) $25\,\pi$ वर्ग इकाई

32. वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 2π वर्ग इकाई (B) π वर्ग इकाई (C) 3π वर्ग इकाई (D) 4π वर्ग इकाई

33. वक्र $y = x + 1$ तथा $x = 2$ और $x = 3$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{7}{2}$ वर्ग इकाई (B) $\frac{9}{2}$ वर्ग इकाई (C) $\frac{11}{2}$ वर्ग इकाई (D) $\frac{13}{2}$ वर्ग इकाई

34. वक्र $x = 2y + 3$ तथा $y = 1$ और $y = -1$ रेखाओं द्वारा परिबद्ध क्षेत्र का क्षेत्रफल है

(A) 4 वर्ग इकाई (B) $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई (C) 6 वर्ग इकाई (D) 8 वर्ग इकाई